

۱- گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{aligned} u : x^2 + y^2 + z^2 \\ g : x + 2y - 3z = 7 \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} \nabla u = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x, 2y, 2z) = \lambda(1, 2, -3) \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda}{2} \\ y = \lambda \\ z = -\frac{3}{2}\lambda \\ g = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{g=0} \frac{\lambda}{2} + 2(\lambda) - 3(-\frac{3}{2}\lambda) = 7 \Rightarrow (\frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2})\lambda = 7 \Rightarrow \lambda = 1$$

بحرانی تابع u تحت قید g نقطه $A(\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2})$ با مقدار $3/5$ $u(A) = \frac{7}{5}$ است.

۲- گزینه ۱ درست است.

صفحات مماسی همان دو صفحه مماس جداگانه بر دو رویه هستند که شرایط تعامد آنها صفر شدن ضرب داخلی گرادیان دو رویه که نقش نرمال صفحات را دارند، است.

$$\nabla f = ((x - c), 2y, 2z)$$

$$\nabla g = (2x, 2(y - 1), 2z)$$

$$4x(x - c) + 4y(y - 1) + 4z^2 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 + y^2 + z^2 = cx + y (*)$$

$$\begin{cases} f : x^2 + y^2 + z^2 = 3 - c^2 + 2cx \\ g : x^2 + y^2 + z^2 = 2y \end{cases}$$

رویه‌ها:

$$\xrightarrow{*} \begin{cases} cx + y = 3 - c^2 + 2cx \xrightarrow{**} cx + cx = 3 - c^2 + 2cx \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3} \\ cx + y = 2y \Rightarrow y = cx (***) \end{cases}$$

۳- گزینه ۱ صحیح است.

بردار نرمال صفحه مماسی بر رویه‌ای که از فصل اشتراک دو خم می‌گذرد، از حاصل ضرب خارجی بردارهای مماس بر هر خم در نقطه اشتراک بدست می‌آید. توجه شود که در جایی که $z = 2, y = 1, x = 3$ است، $t_1 = 0, t_2 = 1$ خواهد بود.

$$\begin{cases} v_1 = (1 - 3t^2, -1 + 4t, 1) \\ v_2 = (3t^2 - 2, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1(t=0) = (1, -1, 1) \\ v_2(t=1) = (1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{N} = (-1, 1, 2)$$

$$P: -(x - 3) + (1)(y - 1) + 2(z - 2) = 0 \Rightarrow -x + y + 2z + 3 - 1 - 4 = 0 \Rightarrow -x + y + 2z - 2 = 0$$

۴- گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(3-y)(x+y-3) + (3-x)(3-y) = 0 \\ -(3-x)(x+y-3) + (3-x)(3-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-y)(\underbrace{-x-y+3+3-x}_{-2x-y+6}) = 0 \\ (3-x)(\underbrace{-x-y+3+3-y}_{-x-2y+6}) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} y = 3 \xrightarrow{*} (3-x)(-x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array} \right. \\ y = 6 - 2x \xrightarrow{*} (3-x)(-6 + 3x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array} \right. \end{cases}$$

پس بحرانی‌های تابع $(0, 3), (3, 3), (2, 2), (3, 0)$ هستند.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2(3-y) & -9+2x+2y \\ -9+2x+2y & -2(3-x) \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} \Delta(0, 3) < 0 \longrightarrow \text{زینی} \\ \Delta(3, 3) < 0 \longrightarrow \text{زینی} \\ \Delta(3, 0) < 0 \longrightarrow \text{زینی} \\ \Delta(2, 2) = 3 > 0 \rightarrow f_{11}(2, 2) = -2 < 0 \rightarrow \text{ماکزیمم نسبی} \end{cases}$$

از طرفی چون تابع هیچ محدودیت دامنه‌ای ندارد متغیرها می‌توانند نامتناهی باشند و به این ترتیب برد تابع R یعنی $(-\infty, +\infty)$ ولذا اکستریم مطلق روی صفحه xy ندارد.

۵- گزینه ۴ صحیح است.

مقدار ماکزیمم مشتق جهتی همان اندازه بردار گرادیان در نقطه موردنظر است.

$$\nabla f = (3x^2 - 4yz, 6y^2 - 4xz, 3z^2 - 4xy)$$

$$\xrightarrow{A(-1, 1, 2)} \nabla f(A) = (-5, 14, 16) \Rightarrow |\nabla f(A)| = \sqrt{25 + 196 + 256}$$

$$|\nabla f(A)| = \sqrt{477} = \sqrt{9 \times 53} = 3\sqrt{53}$$